第二节　圆周运动

1. 已知路程：$s = 2t^2$，

　则质点的**速率**：$v = \dfrac{ds}{dt} = 4t(\mathrm{m/s})$，**切向加速度**：$a_t = \dfrac{dv}{dt} = 4\ (\mathrm{m/s^2})$，**法向加速度**：$a_n = \dfrac{v^2}{R} = 8t^2\ (\mathrm{m/s^2})$，

　总加速度矢量：$\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n = (4\vec{e}_t + 8t^2\vec{e}_n)\ \mathrm{m/s^2}$.

2. 已知**角加速度** β **恒定**，即 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} =$ 常数；又转过 60 转（即转过 $\Delta\theta = 60\times 2\pi$ 角度）后，角速度由 $\omega_1 = 20\pi\,\mathrm{rad/s}$ 变为 $\omega_2 = 30\pi\,\mathrm{rad/s}$，给出了角速度 ω 与角位移 $\Delta\theta$ 的关系：

　由 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d\omega}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \beta = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \beta d\theta = \omega d\omega \Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2}\beta d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\omega d\omega$，其中 β 为常数，

$$\Rightarrow \beta(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad \Rightarrow \omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\beta(\theta_2 - \theta_1) = 2\beta\Delta\theta,$$

$$\Rightarrow \text{角加速度：}\beta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\Delta\theta} = \frac{900\pi^2 - 400\pi^2}{2\times 60\times 2\pi} = \frac{25}{12}\pi(\mathrm{rad/s^2});$$

　由 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = \int_{t_1}^{t_2}\beta dt \Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \beta(t_2 - t_1) = \beta\Delta t$，

$$\Rightarrow \text{所需的时间：}\Delta t = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\beta} = \frac{30\pi - 20\pi}{\frac{25}{12}\pi} = \frac{24}{5}\mathrm{s}.$$

3. （A）在一般**圆周运动**中，法向加速度方向一定指向圆心，亦称为向心加速度。切向加速度沿切线方向，**总加速度方向不一定指向圆心**。

　（B）速度和加速度都是矢量，既有大小，又有方向。在**匀速率圆周运动**中速度大小和加速度大小均保持不变，但**方向不断变化**。

　（C）物体做**曲线运动**时，**速度方向一定沿轨迹的切线方向**，指向运动方向，故在自然坐标系下速度 $\vec{v} = v\vec{e}_t$，可写成速率 v 乘以切向单位矢量 $\vec{e}_t$ 的形式。由此可见，**速度无法向分量**，法向分速度一定为零，但**法向加速度** $a_n = \dfrac{v^2}{r}$ 与法向分速度无关，**与速率** v 有关。

　（D）物体做曲线运动时，速度方向必定变化，而**速度方向变化产生法向加速度**，所以**曲线运动中，必有法向加速度**，总加速度指向曲线凹的一侧。　　**本题选（D）**

4. （A）单摆运动过程中受**重力和摆绳的拉力**作用，重力竖直向下，保持不变，但**绳中拉力在变化**，总加速度 $\vec{a}$ 在变化。

　（B）**匀速率圆周运动**中，加速度大小 $a = \dfrac{v^2}{r}$ 不变，但**方向在变化**。

　（C）行星做椭圆轨道运动，**万有引力的方向沿两者的连线方向，是有心力**。万有引力的大小和方向都在变化，则总加速度 $\vec{a}$ 在变化。

　（D）**抛体运动**中，物体受重力作用，**加速度为重力加速度，保持不变**。

　（E）圆锥摆运动中，物体受重力和绳中拉力作用，重力保持不变，但绳中拉力方向不断变化，总加速度 $\vec{a}$ 在变化。　　**本题选（D）**

5. 已知路程：$s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$，

则速率：$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$，切向加速度：$a_t = \frac{dv}{dt} = -b$，法向加速度：$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$；

（1）在 t 时刻，质点加速度：$\vec{a} = -b\vec{e}_t + \frac{(v_0 - bt)^2}{R}\vec{e}_n$；

（2）加速度大小：$a = \sqrt{(-b)^2 + (\frac{(v_0 - bt)^2}{R})^2} = \sqrt{b^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2}}$，

由 $a = \sqrt{b^2 + \frac{(v_0 - bt)^4}{R^2}} = b \Rightarrow t = \frac{v_0}{b}$，即当 $t = \frac{v_0}{b}$ 时，加速度大小等于 b.

6. 角加速度 $\beta = 0.2\,\mathrm{rad/s^2}$（常数），为匀变速圆周运动，且初始条件：$t = 0$ 时，$\omega_0 = 0$，

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \beta dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \beta dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \beta t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \beta t,$$

$\Rightarrow$ t 时刻边缘上各点的角速度：$\omega = \beta t$，速率（速度大小）：$v = \omega R = R\beta t$，（速度方向沿各点切线方向）

$\Rightarrow$ 切向加速度：$a_t = \frac{dv}{dt} = R\beta$，法向加速度：$a_n = \frac{v^2}{R} = R\beta^2 t^2$，

当 $t = 2\mathrm{s}$ 时，速度大小：$v = R\beta t = 0.4 \times 0.2 \times 2 = 0.16\,\mathrm{m/s}$，速度方向沿各点轨迹的切线方向；

切向加速度：$a_t = \frac{dv}{dt} = R\beta = 0.4 \times 0.2 = 0.08\,\mathrm{m/s^2}$；

法向加速度：$a_n = \frac{v^2}{R} = R\beta^2 t^2 = 0.4 \times 0.04 \times 4 = 0.064\,\mathrm{m/s^2}$；

合加速度：$\vec{a} = (0.08\vec{e}_t + 0.064\vec{e}_n)\,\mathrm{m/s^2}$.

重要结论：

①由速率：$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 或 $v = \frac{ds}{dt}$，

先求**切向加速度**：$a_t = \frac{dv}{dt}$，再求**法向加速度**：$a_n = \frac{v^2}{R}$ 或 $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$；

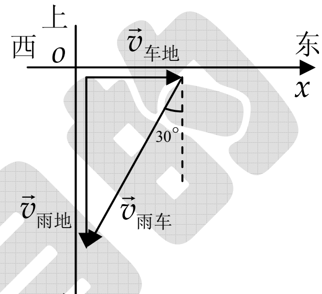
②匀变速圆周运动中，角加速度 α 为常数，若初始条件：$t = 0$ 时，ω_0，θ_0，有如下结果可直接使用：

$\omega = \omega_0 + \alpha t$，		$v = v_0 + at$，
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$，	可类比匀变速直线运动	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$，
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$，		$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$，

第三节　相对运动

重点分析：求解相对运动问题时，首先建立合适的坐标系，写出各速度矢量（例如：$\vec{v}_{PO}$，$\vec{v}_{PO'}$，$\vec{v}_{O'O}$）的表达形式，再利用伽利略速度变换：$\vec{v}_{PO}=\vec{v}_{PO'}+\vec{v}_{O'O}$ 求解。

1. 建立如图所示地面坐标系：竖直向下为 y 轴正方向；“左西，右东”，水平向东为 x 轴正方向。



（第 1 题图）

设雨相对地面的速度大小为 v，则 $\vec{v}_{雨地}=v\vec{j}$；又已知 $\vec{v}_{车地}=10\,\text{m/s}\,\vec{i}$，

根据速度变换：$\vec{v}_{雨车}=\vec{v}_{雨地}+\vec{v}_{地车}=\vec{v}_{雨地}-\vec{v}_{车地}=v\vec{j}-10\,\text{m/s}\,\vec{i}$，

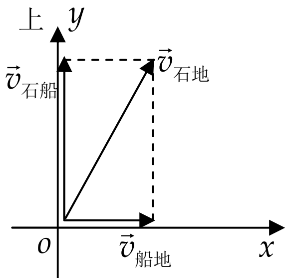
由雨相对车在竖直方向成 30° 角，如图：$\tan 30^\circ=\dfrac{10}{v}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\;\Rightarrow\;v=10\sqrt{3}\,\text{m/s}$，

所以，雨相对地面的速度：$\vec{v}_{雨地}=10\sqrt{3}\,\text{m/s}\,\vec{j}$，速率：$v_{雨地}=10\sqrt{3}\,\text{m/s}$；

雨相对车的速度：$\vec{v}_{雨车}=-10\,\text{m/s}\,\vec{i}+10\sqrt{3}\,\text{m/s}\,\vec{j}$，

雨相对车的速率：$v_{雨车}=\sqrt{(-10)^2+(10\sqrt{3})^2}=20\,\text{m/s}$.

2. 建立如图所示地面坐标系：船直线航行方向为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向。



（第 2 题图）

$\vec{v}_{船地}=v_0\vec{i}$，$\vec{v}_{石船}=v_1\vec{j}$，则石相对地的初速度：$\vec{v}_{石地}=\vec{v}_{石船}+\vec{v}_{船地}=v_0\vec{i}+v_1\vec{j}$；

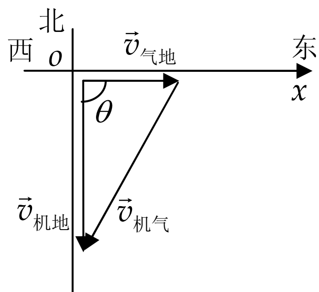
石头相对地面在 x 轴方向做匀速直线运动：$x=v_0t$，

在 y 轴方向做竖直上抛：$y=v_1t-\dfrac{1}{2}gt^2$，

消去时间 t，得**轨迹方程**：$y=-\dfrac{g}{2v_0^2}x^2+\dfrac{v_1}{v_0}x$，

轨迹形状是开口向下的抛物线。

3. 由速度变换：$\vec{v}_{机地}=\vec{v}_{机气}+\vec{v}_{气地}$，即速度矢量形成一闭合三角形，如图，



（第 3 题图）

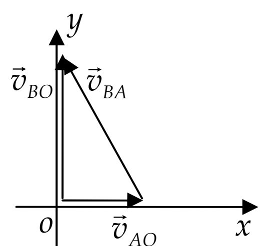
又由余弦定理：$v_{机气}^2=v_{气地}^2+v_{机地}^2-2\cdot v_{气地}v_{机地}\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow\quad 200^2=56^2+192^2-2\times 56\times 192\times\cos\theta\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=0$，

$\Rightarrow\;\vec{v}_{机地}$ 和 $\vec{v}_{气地}$ 之间的夹角：$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

即飞机相对地面向正南或向正北方向。　本题选（C）

4. 如图，$\vec{v}_{AO}=2\,\text{m/s}\,\vec{i}$，$\vec{v}_{BO}=2\,\text{m/s}\,\vec{j}$；



（第 3 题图）

$\vec{v}_{BA}=\vec{v}_{BO}+\vec{v}_{OA}=\vec{v}_{BO}-\vec{v}_{AO}=(2\vec{j}-2\vec{i})\,\text{m/s}$，

即 B 船相对 A 船的速度为：$\vec{v}_{BA}=(-2\vec{i}+2\vec{j})\,\text{m/s}$. **本题选（B）**

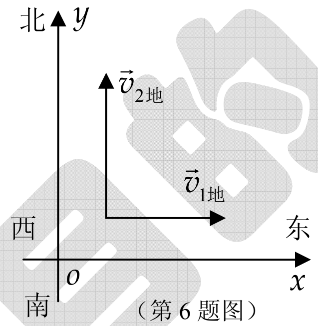
5. 物体 A 相对 B 的速度大小为 $v=\sqrt{2gy}$，方向沿斜面向下，$\Rightarrow\ \vec{v}_{AB}=\sqrt{2gy}(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})$，

斜面 B 相对地面以 u 匀速向右运动，$\Rightarrow\ \vec{v}_{B地}=u\vec{i}$，（沿 x 轴正方向）

由速度变换：$\vec{v}_{A地}=\vec{v}_{AB}+\vec{v}_{B地}=(\sqrt{2gy}\cos\alpha+u)\vec{i}+\sqrt{2gy}\sin\alpha\vec{j}$，

物体 A 滑到地面时，$y=h$，物体 A 相对地面的速度：$\vec{v}_{A地}=(\sqrt{2gh}\cos\alpha+u)\vec{i}+\sqrt{2gh}\sin\alpha\vec{j}$.

6. 建立如图所示坐标系，船相对地面的速度：$\vec{v}_{船地}=30\vec{i}\ \mathrm{km/h}$，



（第 6 题图）

小艇相对地面的速度：$\vec{v}_{艇地}=40\vec{j}\ \mathrm{km/h}$，

在船上看小艇的速度（即小艇相对船的速度）：

$$\vec{v}_{艇船}=\vec{v}_{艇地}+\vec{v}_{地船}=\vec{v}_{艇地}-\vec{v}_{船地}=(-30\vec{i}+40\vec{j})\mathrm{km/h}\ ;$$

在艇上看船的速度（即船相对小艇的速度）：

$$\vec{v}_{船艇}=\vec{v}_{船地}+\vec{v}_{地艇}=\vec{v}_{船地}-\vec{v}_{艇地}=(30\vec{i}-40\vec{j})\mathrm{km/h}.$$